

Problemas TEMA 6

PROBLEMA 1

a) *Determina la función de probabilidad marginal de X*

Los posibles valores de X son 0, 1, 2, 3. La función de probabilidad marginal en cada uno de estos puntos es:

$$f_X(0) = \sum_{j=0}^3 P(X=0, Y=j) = 0,10 + 0,10 + 0,05 + 0 = \mathbf{0,25}$$

$$f_X(1) = \sum_{j=0}^3 P(X=1, Y=j) = 0,05 + 0,15 + 0,10 + 0 = \mathbf{0,30}$$

$$f_X(2) = \sum_{j=0}^3 P(X=2, Y=j) = 0,05 + 0,10 + 0,10 + 0 = \mathbf{0,25}$$

$$f_X(3) = \sum_{j=0}^3 P(X=3, Y=j) = 0,05 + 0,05 + 0,05 + 0,05 = \mathbf{0,20}$$

b) *Determina la función de probabilidad de X condicional a Y = 1*

La función de probabilidad condicional es el cociente entre la conjunta y la marginal. La marginal de Y en el punto 1 es:

$$f_Y(1) = \sum_{j=0}^3 P(X=j, Y=1) = 0,10 + 0,15 + 0,10 + 0,05 = \mathbf{0,40}$$

Por tanto:

$$f_{X|Y=1}(0) = f(0,1)/f_Y(1) = 0,10/0,4 = \mathbf{0,25}$$

$$f_{X|Y=1}(1) = f(1,1)/f_Y(1) = 0,15/0,4 = \mathbf{0,375}$$

$$f_{X|Y=1}(2) = f(2,1)/f_Y(1) = 0,10/0,4 = \mathbf{0,25}$$

$$f_{X|Y=1}(3) = f(3,1)/f_Y(1) = 0,05/0,4 = \mathbf{0,125}$$

c) *Si seleccionamos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no esté nada satisfecha con los transportes públicos nacionales?, ¿y la de que esté muy satisfecha?*

El grado de satisfacción con los transportes públicos nacionales lo indica la variable Y, luego:

$$P(Y=0) = f_Y(0) = \sum_{j=0}^3 P(X=j, Y=0) = 0,10 + 0,05 + 0,05 + 0,05 = \mathbf{0,25}$$

$$P(Y=3) = f_Y(3) = \sum_{j=0}^3 P(X=j, Y=3) = 0 + 0 + 0 + 0,05 = \mathbf{0,05}$$

d) *Si seleccionamos una persona al azar y sabemos que está muy satisfecha con los transportes públicos locales, ¿cuál es la probabilidad de que no esté nada satisfecha con los transportes públicos nacionales?, ¿y la de que esté muy satisfecha?*

$$P(Y=0 | X=3) = f_{Y|X=3}(0) = f(3,0)/f_X(3) = 0,05/0,2 = \mathbf{0,25}$$

$$P(Y=3 | X=3) = f_{Y|X=3}(3) = f(3,3)/f_X(3) = 0,05/0,2 = \mathbf{0,25}$$

e) *Si seleccionamos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté igual de satisfecha con los transportes públicos locales que con los nacionales?*

$$P(X=Y) = \sum_{j=0}^3 P(X=j, Y=j) = 0,10 + 0,15 + 0,10 + 0,05 = \mathbf{0,40}$$

PROBLEMA 2

a) *¿Cuál es la probabilidad de que un hogar de esta población tenga dos ordenadores?*

El número de ordenadores es la v.a. Y :

$$P(Y = 2) = f_Y(2) = \sum_{j=0}^2 P(X = j, Y = 2) = 0,03 + 0,12 + 0,05 = \mathbf{0,20}$$

b) *Calcula la probabilidad del suceso $X \geq 2Y$*

El suceso $X \geq 2Y$ ocurre cuando tiene lugar uno de los cuatro casos siguientes:

- $X = 0, Y = 0$
- $X = 1, Y = 0$
- $X = 2, Y = 0$
- $X = 2, Y = 1$

Por tanto, la probabilidad de este suceso es $f(0,0) + f(1,0) + f(2,0) + f(2,1) = 0,04 + 0,25 + 0,01 + 0,10 = \mathbf{0,40}$

c) *¿Tiene X más variabilidad que Y ?*

Debemos calcular las varianzas de X e Y y compararlas. Para calcular la varianza de X debemos obtener su función de probabilidad marginal. Los posibles resultados de X son 0, 1, 2. Los valores de la función de probabilidad marginal son:

$$f_X(0) = \sum_{j=0}^2 P(X = 0, Y = j) = 0,04 + 0,05 + 0,03 = \mathbf{0,12}$$

$$f_X(1) = \sum_{j=0}^2 P(X = 1, Y = j) = 0,25 + 0,35 + 0,12 = \mathbf{0,72}$$

$$f_X(2) = \sum_{j=0}^2 P(X = 2, Y = j) = 0,01 + 0,10 + 0,05 = \mathbf{0,16}$$

De aquí se deduce que:

$$E(X) = 0 \times 0,12 + 1 \times 0,72 + 2 \times 0,16 = \mathbf{1,04}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,12 + 1^2 \times 0,72 + 2^2 \times 0,16 = \mathbf{1,36}$$

Por tanto, $\text{Var}(X) = 1,36 - 1,04^2 = \mathbf{0,2784}$. Análogamente, para calcular la varianza de Y debemos obtener su función de probabilidad marginal. Los posibles resultados de Y son 0, 1, 2. En el apartado anterior ya hemos calculado $f_Y(2) = 0,20$; los otros valores de la función de probabilidad marginal son:

$$f_Y(0) = \sum_{j=0}^2 P(X = j, Y = 0) = 0,04 + 0,25 + 0,01 = \mathbf{0,30}$$

$$f_Y(1) = \sum_{j=0}^2 P(X = j, Y = 1) = 0,05 + 0,35 + 0,10 = \mathbf{0,50}$$

De aquí se deduce que:

$$E(Y) = 0 \times 0,3 + 1 \times 0,5 + 2 \times 0,2 = \mathbf{0,9}$$

$$E(Y^2) = 0^2 \times 0,3 + 1^2 \times 0,5 + 2^2 \times 0,2 = \mathbf{1,3}$$

Por tanto, $\text{Var}(Y) = 1,3 - 0,9^2 = \mathbf{0,49}$. Este valor es superior al obtenido antes; así pues, **X no tiene más variabilidad que Y .**